MATHEMATICAL MODELS AND INVERSE PROBLEMS

A. O. VATULYAN

This article deals with the problems of simulaition of different contemporary mathematical processes, such as computer tomography, ultrasonic flaw detection and others, which are discussed from the point of view of the theory of the inverse problems. Examples of the inverse problems are mentioned, their main features and prospects of application in the simulation are discussed.

Обсуждаются вопросы современного математического моделирования различных процессов (компьютерная томография, ультразвуковая дефектоскопия и др.) с точки зрения теории обратных задач. Приведены примеры обратных задач, обсуждены их основные особенности и перспективы использования в моделировании.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ

А. О. ВАТУЛЬЯН

Ростовский государственный университет, Ростов-на-Дону

ВВЕДЕНИЕ

В различных областях науки и техники с целью познания закономерностей работы некоторого объекта или природного явления проводятся эксперименты самого различного вида. Цель эксперимента – выявление главных закономерностей явления и формирование на его основе некоторой математической модели. Очень часто на практике встречаются ситуации, когда объект исследования либо принципиально недоступен для наблюдения, либо проведение такого эксперимента дорого. Примерами таковых могут служить эксперименты по изучению внутреннего строения Земли, на основе которых можно было бы прогнозировать месторождения полезных ископаемых, предсказывать время и место разрушительных землетрясений. Отметим, что глубина самых глубоких шахт, пробуренных при помощи современнейшего оборудования, не превышает 20 км, а средний радиус Земли равен 6371 км. Таким образом, для непосредственных наблюдений колебаний Земли доступна лишь небольшая ее приповерхностная часть. При этом необходимо делать заключение о свойствах Земли (например, об изменении ее плотности с глубиной) по измеренным в ходе эксперимента косвенным проявлениям. Похожая ситуация возникает в проблемах неразрушающего контроля изделий и конструкций, когда требуется выявить дефект (трещину или полость) внутри работающего объекта (самолета, ракеты или ядерного реактора).

Другой пример – это медицинские исследования, направленные на выявление патологий внутренних органов человека. С открытием рентгеновских лучей человечество приобрело мощный инструмент исследования грудной клетки, костей, пищеварительного тракта, но в силу их неблагоприятного воздействия на ткани продолжались поиски менее вредного и более информативного способа изучения органов человека. Таким способом в настоящее время является ультразвуковое исследование (УЗИ), широко применяемое в медицинской практике и позволяющее достаточно просто выявлять патологии различных органов. В этом случае объект исследования также недоступен для непосредственного изучения. Мы судим о структуре и размерах органов лишь на основе косвенных данных измерений. В основе этого способа лежит анализ отраженных от органа волн.

У описанных выше примеров есть нечто общее – мы хотим определить причины, если известны полученные в результате экспериментов или наблюдений следствия. С точки зрения соотношения причина–следствие все задачи математического моделирования можно условно разделить на два больших класса: прямые задачи (известны причины, необходимо найти следствия) и обратные (известны следствия, нужно найти причины). К прямым задачам относятся, например, задачи расчета механических, тепловых, электромагнитных полей для тел, свойства которых и конфигурация известны. Эти задачи к настоящему времени достаточно хорошо изучены и составляют сущность одного из важнейших разделов современной математики – уравнений математической физики или уравнений в частных производных. Первые работы в этой области были написаны более 200 лет назад, и с тех пор накоплено немало результатов, позволяющих, например, исследовать свойства решений, не решая самих уравнений, исследовать вопросы существования и единственности решений, сходимости различных приближенных методов.

К обратным задачам относят задачи определения некоторых физических свойств объектов, таких, как плотность, коэффициент теплопроводности, упругие модули в зависимости от координат или в виде функций других параметров. Процедура решения таких задач, состоящих в обращении причинно-следственных связей, связана с преодолением серьезных математических трудностей. Успех ее сильно зависит как от качества и количества полученной из эксперимента информации, так и от способа ее обработки. Заметим, что без умения решать прямые задачи невозможно подойти к обратным.

Решение обратных задач проводится, как правило, в рамках некоторой математической модели исследуемого объекта. Оно состоит в определении либо коэффициентов дифференциальных уравнений, либо области, в которой действует оператор, либо начальных условий, либо сочетания приведенных выше причин [1, 2].

ПРИМЕРЫ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Пример 1. Движение материальной точки массы m в соответствии с законом Ньютона описывается дифференциальным уравнением

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(t).$$

Здесь $x(t)$ – положение точки в момент времени t, $F(t)$ – сила, действующая на точку. Будем считать, что начальное положение точки и ее скорость известны. Предположим, что известно положение точки $x(t)$ как функция времени. Обратная задача состоит в определении зависимости $F = F(t)$ по известному закону $x(t)$, то есть в определении действующей на точку силы по измеряемой ее траектории.

Пример 2. Предположим, что в пространстве расположено недоступное для непосредственного наблюдения тело. Однако его можно облучать с различных сторон и регистрировать тень на некоторой плоскости α, перпендикулярной направлению облучения (рис. 1). Обратная задача состоит в определении формы тела по семейству его теней. Рассмотрим простую математическую модель этого процесса.

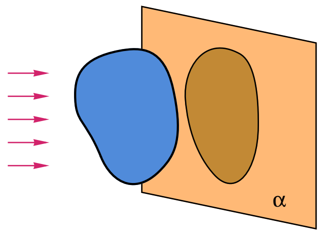

Рис. 1

Пусть $f(x)$ – коэффициент поглощения рентгеновских лучей биотканями в точке x, то есть относительное уменьшение интенсивности излучения на малом отрезке Δx в точке x составляет

$$\frac{\Delta I}{I} = f(x)\Delta x.$$

Если обозначить через I_0 начальную интенсивность прямолинейного луча L, а через I_1 интенсивность после прохождения тела, то они связаны зависимостью

$$\frac{I_1}{I_0} = \exp\left(-\int_L f(x)dx\right).$$

Таким образом, в результате облучения по разным направлениям мы знаем интегралы от функции $f(x)$ по всевозможным прямым L. Обратная задача состоит в определении функции $f(x)$ по совокупности этих интегралов. Решение этой математической проблемы составляет фундамент современной компьютерной томографии [3]. Основополагающая работа, в которой была получена формула, позволяющая восстанавливать функцию по набору ее проекций, была получена в 1917 году австрийским математиком И. Радоном, а практическое ее использование началось полвека спустя.

Пример 3. На поверхности исследуемого объекта имеются источник колебаний и их приемник, который регистрирует волны как непосредственно пришедшие от источника, так и отраженные от дефекта (полость, включение из другого материала, трещина). Обратная задача состоит в определении по известным амплитуде и фазе регистрируемого сигнала геометрической границы дефекта и выявлении его структуры (рис. 2).

Пример 4. Простейшая линейная модель прибора, регистрирующего какие-либо физические поля (электромагнитные, тепловые), может быть описана

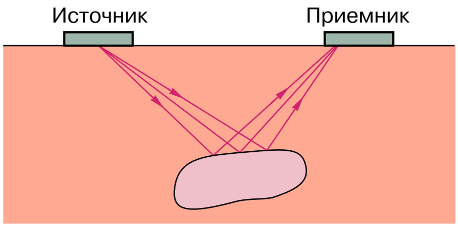

Рис. 2

следующим образом. На вход прибора поступает сигнал $u(t)$, на выходе регистрируется сигнал $f(t)$, которые связаны зависимостью

$$\int_0^t K(t,s)u(s)ds = f(t), \qquad (1)$$

где $K(t, s)$ – известная функция. Обратная задача состоит в определении входного сигнала $u(t)$ по регистрируемой прибором функции $f(t)$, то есть в нахождении решения уравнения (1).

Пример 5. Существуют еще два важных типа обратных задач, несколько обособленных от рассмотренных ранее, – это проектирование технических объектов и управление системами. Задачи первого типа достаточно подробно обсуждены в [4], где основное внимание уделяется созданию аэродинамических профилей оптимальной формы и отысканию оптимального подземного контура в теории фильтрации.

Рассмотренные выше примеры 1–4 можно трактовать как обратные задачи идентификации, то есть определения свойств объекта; пример 5 относится к задачам типа проектирования. Между этими двумя типами существует принципиальное отличие. Для задач проектирования и управления расширение множества допустимых решений обычно улучшает ситуацию, поскольку в них требуется найти любое технически выполнимое решение, обеспечивающее критерий качества с необходимой точностью. При решении обратных задач типа идентификации расширение класса возможных решений приводит к увеличению погрешности определения причинных характеристик. Учет же априорной информации, то есть дополнительных сведений о свойствах исследуемого объекта, приводит к сужению класса возможных решений и, как правило, к снижению погрешности определения нужных характеристик.

О СПЕЦИФИКЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Обратные задачи обладают рядом неприятных с математической точки зрения особенностей. Во-первых, они, как правило, нелинейны, то есть неизвестная функция или неизвестный параметр входит в операторное или функциональное уравнение нелинейным образом. Во-вторых, решения обратных задач обычно неединственны. Для обеспечения единственности часто необходимо требовать избыточности экспериментальной информации, например при определении формы полости в теле при помощи регистрации отраженных волн необходимо знание отраженного поля в некотором диапазоне изменения частоты $\omega_0 \in [\omega_1, \omega_2]$. На практике же мы можем измерить отраженное поле в достаточно большом, но конечном наборе частот на отрезке $[\omega_1, \omega_2]$, что может привести к неединственности восстановления формы полости, появлению посторонних или, как называют их в ультразвуковой диагностике, “фантомных” решений.

В-третьих, обратные задачи не являются корректными. Понятие корректной задачи, являющееся одним из важнейших понятий современной математики, было сформулировано французским математиком Ж. Адамаром (1923 год). Оно означает, что решение задачи существует и единственно на некотором множестве, а также непрерывно зависит от входных данных. Смысл первого условия (существование решения) состоит в том, что среди исходных данных нет противоречащих друг другу условий, исключающих возможность решения задачи. Второе условие (единственность) означает, что данных достаточно для однозначной определенности решения задачи. Третье условие (непрерывная зависимость от исходных данных) означает, что малые изменения в данных приводят к малым изменениям в решении. Задачи, не удовлетворяющие хотя бы одному из условий корректности, называются некорректными. В обратных задачах, как правило, отсутствует непрерывная зависимость от исходных данных в отличие от прямых задач. Поскольку входной информацией в обратных задачах являются экспериментальные данные, определяемые с некоторой погрешностью, которую не всегда можно оценить, то решение обратной задачи с “испорченными” входными данными может сильно отличаться от точного решения. В этой ситуации на первый план выходят способы математической обработки входной информации. Большой вклад в развитие математической теории некорректных задач внес отечественный математик академик А.Н. Тихонов [5], который определил, как надо понимать решение некорректной задачи. Он предложил один из возможных способов регуляризации некорректной задачи, состоящий в сведении исходной задачи решения некоторого операторного уравнения к проблеме отыскания минимума некоторого функционала.

Некорректность присуща обратным задачам почти всегда; в одних случаях она может быть преодолена весьма просто, в других вообще требует переосмысления понятия самого решения. Рассмотрим несколько примеров.

Задача 1. Найти непрерывную функцию $u(t)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\frac{du}{dt} = f(t). \qquad (2)$$

Нетрудно проверить, используя правила дифференцирования, что функция $u(t) = \int f(t)dt + C$ есть решение, если C – произвольная константа. Таким образом, задача 1 некорректна, ибо ее решение неединственно. Эту некорректность можно легко преодолеть, сузив область отыскания решения, а именно подчинив функцию $u(t)$ дополнительному условию, фиксирующему ее значение в начальный момент времени, например $u(0) = 0$. Условие такого рода называется начальным или условием Коши. В этом случае уравнение (2) с начальным условием имеет единственное решение $u(t) = \int_0^t f(t)dt$. Здесь переход от некорректной задачи к корректной достигается путем сужения множества возможных решений, и задача называется условно корректной.

Задача 2. Пусть дано дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_0y = 0. \qquad (3)$$

Такое уравнение возникает, например, при изучении колебаний тела на пружине при наличии силы сопротивления или описывает деформацию наследственно-упругого тела (полимера). Требуется определить два числа a_1 и a_0, зная какое-то решение этого уравнения, не равное тождественно нулю. Нетрудно заметить, что такая общая постановка не является достаточно содержательной и требует некоторого уточнения. Во-первых, такая задача имеет неединственное решение. В качестве примера рассмотрим случай, когда $a_1 = \lambda$, $a_0 = -(\lambda + 1)$, где λ – произвольное действительное число. Тогда для любого λ решением является функция $y(t) = e^t$. Таким образом, если в качестве исходной информации задано решение $y = e^t$, то обратная задача имеет бесконечное множество решений. Этот факт объясняется тем, что общее решение уравнения (3) с так выбранными коэффициентами равно

$$y(t) = C_1e^t + C_2e^{-(\lambda + 1)t},$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Взяв в качестве исходной информации экспоненту, мы, очевидно, потеряли целое семейство решений. Поэтому необходима формулировка некоторых дополнительных условий, которые обеспечат единственность. В качестве такого условия может быть принято следующее [2]. Пусть на отрезке $[a, b]$ задано решение уравнения (3) и на нем присутствуют точки t_1, t_2 такие, что $y(t_1)y'(t_2) - y(t_2)y'(t_1) \neq 0$. Тогда a_1, a_0 определяются по $y(t)$ однозначно.

Рассматриваемый пример есть свидетельство того, что задача определения двух постоянных коэффициентов может иметь неединственное решение даже в том случае, когда исходная (измеряемая) информация представляет собой функцию, не равную тождественно константе.

Пример 6. Рассмотрим более сложный пример – решение интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода, к которому очень часто сводятся обратные задачи. Интегральным называется уравнение, содержащее неизвестную функцию под знаком интеграла. Уравнение Фредгольма 1-го рода – это

$$\int_a^b K(x, s)u(s)ds = f(x), \qquad c \le x \le d, \qquad (4)$$

где $K(x, s)$ – непрерывная функция двух переменных, называемая ядром интегрального уравнения, $f(x)$ – заданная функция, $u(s)$ – неизвестная функция. Оказывается, что проблема решения такого уравнения некорректна в силу того, что отсутствует непрерывная зависимость решения от правой части. Покажем это на конкретном примере. Рассмотрим интегральное уравнение вида (4) с ядром $K(x, s) = \sin(x + s)$ на отрезке $[0,2\pi]$

$$\int_0^{2\pi} \sin(x + s)u(s)ds = f(x), \qquad x \in [0, 2\pi]. \qquad (5)$$

Используя соотношение $\sin(x + s) = \sin x\cos s + \cos x\sin s$, перепишем (5) в виде

$$\sin x\int_0^{2\pi} u(s)\cos s ds + \cos x\int_0^{2\pi} u(s)\sin s ds = f(x)$$

или, обозначая

$$C_1 = \int_0^{2\pi} u(s)\cos s ds, \qquad C_2 = \int_0^{2\pi} u(s)\sin s ds,$$

находим

$$C_1\sin x + C_2\cos x = f(x). \qquad (6)$$

Таким образом, уравнение (5) сведено к соотношению (6). Исходя из этого нетрудно заметить, что (5) имеет решения для тех и только тех $f(x)$, которые определяются соотношением (6). Если же $f(x)$ имеет вид сколь угодно мало отличающейся от (6), например $f(x) = 2\sin x + 3\cos x + 10^{-4}\cos 2x$, то уравнение (5) с такой правой частью не имеет решений. Получается, что малое изменение правой части $f(x)$ в данном случае может сделать задачу неразрешимой и соответственно такая задача является некорректной.

Ядро уравнения (5) относится к классу вырожденных, то есть представляется в виде конечной суммы

$$K(x, s) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(s),$$

где $a_k(x)$ и $b_k(s)$ – известные непрерывные функции, например таковыми являются $K(x, s) = e^{x-s}$, $K(x, s) = \lg\frac{x}{s}$. Известно [5], что каждое непрерывное ядро может быть приближено вырожденным с любой степенью точности. Свойства уравнений вида (4) подобны свойствам рассмотренного уравнения (5), и задача нахождения решения (4) является некорректной, то есть малое изменение в функции $f(x)$ может привести к большим погрешностям в определении функции $u(s)$. Поскольку $f(x)$ обычно находится в результате эксперимента или наблюдения и, естественно, имеет некоторую погрешность, вносимую аппаратурой, то обратные задачи, сводимые к уравнениям вида (4), являются некорректными. В такой ситуации надо определить, что же понимать под решением такой задачи. А.Н. Тихонов предложил понимать под решением функцию $u(s)$, доставляющую минимум функционалу $M^\alpha[u]$ (функционалом называется отображение, которое каждой функции из некоторого класса ставит в соответствие число):

$$M^\alpha[u] = \int_c^d \left[\int_a^b K(x, s)u(s)ds - f(x)\right]^2 dx + \alpha\int_a^b u^2(s)ds, \qquad \alpha > 0, \tag{7}$$

если нам известно о функции $u(x)$ только то, что она непрерывна на $[a, b]$. Он же доказал, что эта задача разрешима и имеет единственное решение (даже в том случае, когда исходная задача (4) не имеет решения). Число $\alpha > 0$ в выражении $M^\alpha[u]$ называется параметром регуляризации. Для многих задач это число мало ($\alpha = 10^{-4}–10^{-8}$), однако такое сглаживание и возмущение исходной задачи приводит к успеху. Рассмотрим уравнение (4), в котором

$$K(x, s) = \sin(xs),$$
$$f(x) = -\frac{x^2\cos x - 2\cos x - 2x\sin x + 2}{x^3},$$
$$a = 0, \quad b = 1, \quad c = 1, \quad d = 2.$$

Нетрудно убедиться, что $u(s) = s^2$ есть решение этого интегрального уравнения. Если мы попытаемся решать его численно на основании формулы прямоугольников, то решение будет находиться неустойчиво. На рис. 3 приводятся точное решение данного уравнения (красная линия), решение, построенное на основе метода А.Н. Тихонова при $\alpha = 10^{-5}$ (зеленая линия), и решение, построенное без регуляризации (синяя линия). На рисунке видно, что регуляризованное решение мало отличается от точного, а решение, построенное без регуляризации, имеет пилообразный характер и значительно отличается от точного.

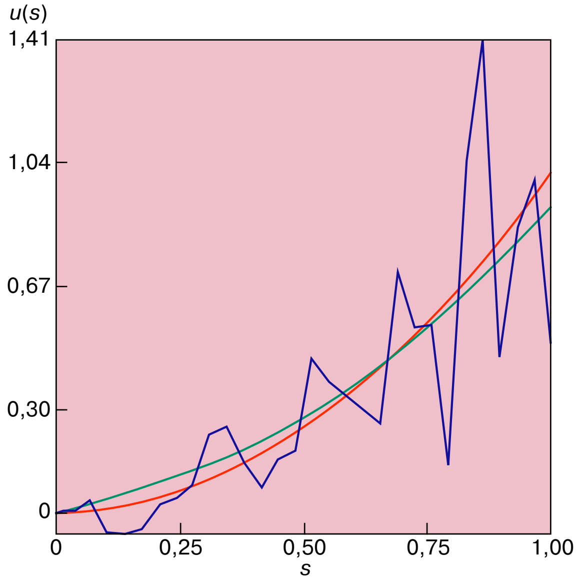

Рис. 3

Еще более успешным является подход, в котором помимо непрерывности искомой функции мы заранее знаем некоторые ее свойства или, как говорят, обладаем априорной информацией. Это может быть, например, ее неотрицательность, ограниченность, монотонное убывание (возрастание). Такие априорные ограничения существенно сужают класс непрерывных функций до достаточно узких множеств, на которых гораздо легче находится минимум функционала (7).

О СОВРЕМЕННЫХ ОБЛАСТЯХ ПРИЛОЖЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Обратные задачи математической физики – бурно развивающаяся в настоящее время часть современной математики, сформировавшаяся в основном в последние 35–40 лет, хотя первые работы относятся к 30-м годам нашего столетия. Все большая часть математических моделей приобретает стройность и достоверность как раз благодаря достижениям теории обратных задач. Так, с ее помощью достигнут впечатляющий прогресс в компьютерной томографии [3]. Стремительное распространение этого метода обусловлено его эффективным применением в медицине, биологии, диагностике плазмы. Внедрение метода компьютерной томографии произвело революцию в медицинской диагностике и электронной микроскопии биологических макромолекул. Создание компьютерных томографов (А. Кормак и Г.Н. Хаунсфилд) и их применение в биохимии (А. Клуг) отмечены Нобелевскими премиями (1979 и 1982 годы). Отметим, что основные математические задачи вычислительной диагностики плазмы сводятся к решению операторных уравнений 1-го рода (подобных уравнению (4)). При нахождении их приближенных решений необходимо использовать методы регуляризации, позволяющие учитывать дополнительную информацию о решении.

Первые обратные задачи были решены в связи с проблемами геофизики и разведки полезных ископаемых. В настоящее время с все большим усложнением моделей, используемых в геофизике, совершенствуется и методика решений обратных задач. Метод акустической разведки полезных ископаемых несравнимо дешевле простого бурения пробных скважин. Вместе с тем геоакустика дает возможность получать более точную информацию о состоянии недр, а звуковые волны являются, по-видимому, наиболее пригодным для локации недр видом возмущения (в последние годы интенсивно обсуждается проект глобального вибрационного просвечивания Земли с целью уточнения ее строения). Обратные задачи геоакустики гораздо труднее, нежели задачи математической томографии, в силу сложного строения рассеяного волнового поля из-за наличия многих типов волн.

Задачи ультразвукового неразрушающего контроля также требуют совершенствования моделей в связи с широким внедрением в практику композиционных материалов, которые обладают различными механическими свойствами по различным направлениям (анизотропией), что влечет за собой усложнение алгоритмов решения обратных задач рассеяния. Для этого класса задач очень важен учет свободной границы (для обнаружения приповерхностных дефектов) и анизотропии материала модели. Обратные задачи об определении формы дефекта приводят к последовательному решению систем интегральных уравнений 1-го рода [6] либо к решению некоторого нелинейного дифференциального уравнения [7]. В последнее время задачи, возникающие в этой области, привлекают внимание математиков-теоретиков. Это связано как с новыми постановками и новыми моделями, так и с развитием методов их решения.

Наконец, отметим, что акустическое зондирование Мирового океана является методом, не знающим конкуренции, поскольку радиоволны плохо распространяются в морской воде из-за ее хорошей электропроводности. Например, свет мощного лазера проникает в океанские глубины на расстояние порядка сотен метров, тогда как звук даже не очень сильного взрыва может быть зарегистрирован на расстоянии десятков тысяч километров. Процессы, происходящие в океане, оказывают определяющее влияние на климат многих районов Земли. Кроме того, океан, малоисследованный по существу, является чрезвычайно богатым источником различных сырьевых ресурсов. Специфика обратных задач акустики океана – достаточно сильная зашумленность полезного сигнала, а также необходимость при решении обрабатывать огромные массивы данных.

В заключение этого небольшого введения в теорию обратных задач резюмируем, что эта область математики бурно развивается и ждет молодых исследователей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984. 261 с.
2. *Денисов А.М.* Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994. 207 с.
3. *Тихонов А.Н.*, *Арсенин В.Я.*, *Тимонов А.А.* Математические задачи компьютерной томографии. М.: Наука, 1987. 160 с.
4. *Ильинский Н.Б.* Обратные краевые задачи и их приложения // Соросовский Образовательный Журнал. 1997. № 4. С. 105–110.
5. *Тихонов А.Н.*, *Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 287 с.
6. *Ватульян А.О.*, *Коренский С.А.* О восстановлении формы приповерхностного дефекта в полупространстве // Докл. РАН. 1995. Т. 334, № 6. С. 753–755.
7. *Боев Н.В.*, *Ватульян А.О.*, *Сумбатян М.А.* Восстановление контура препятствия по характеристикам рассеянного акустического поля в коротковолновой области // Акуст. журн. 1997. № 4. С. 458–462.

* * *

Александр Ованесович Ватульян, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории упругости Ростовского государственного университета и профессор кафедры высшей математики Донского государственного технического университета. Область научных интересов: математические вопросы распространения волн в анизотропных средах, обратные граничные и геометрические задачи механики, интегральные уравнения, численные методы. Автор около 100 публикаций.